$$\Delta p = |\vec{\Delta p}| = \sqrt{\sum_{v=1}^{k}((\vec{f} - \vec{p} + \sum_{i_2=1}^{n_2}(t_{i_2} * \vec{v}_{i_2}) - \sum_{i_1=1}^{n_1}(t_{i_1} * \vec{u}_{i_1}))_v)^2}$$

Jugend Forscht

2016

Untersuchung multidimensionaler Vektorobjekte und -räume

Alexander Kruse

12. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Definitionen **3**

2.1 Raum und Bezugsraum . . . 3

2.2 Raumachsen . . . 3

2.3 Objekte . . . 4

3 Eigenschaften von Objekten **4**

3.1 Aufbau . . . 4

3.2 Dimensionalitäten . . . 6

3.2.1 propemodente Dimensionalität . . . 6

3.2.2 spatiale Dimensionalität . . . 6

3.2.3 angepasste spatiale Dimensionalität . . . 7

3.3 Lageverhältnisse . . . 7

3.4 Lineare Abhängigkeit . . . 9

4 Schnitte von Objekten **10**

4.1 Schnittbereich . . . 10

4.2 Eigenschaften von Schnittbereichen . . . 11

5 Abstand **13**

5.1 Vektorbetrag in k Dimensionen . . . 13

5.2 Abstandsvektor . . . 13

5.3 Abstandsberechnung . . . 13

6 Schnittwinkel **14**

6.1 Problemstellung . . . 14

7 Anwendungsbereich **15**

8 Aussichten **15**

9 Danksagung **15**

10 Anhang **16**

10.1 Quellenverzeichnis 16

10.2 Festgelegte Variablenbezeichnungen 16

Anmerkung: In der Arbeit finden sich oft Begriffe wie 'dreidimensional', 'vierdimensional' oder Ausdrücke wie 'zwei Ebenen' . Um klarere Bezüge zu schaffen stehen diese Aussagen geschrieben als '3-dimensional', '4-dimensional', bzw. '2 Ebenen'.

1 Einleitung

Im Mathematik Unterricht haben wir uns ein ganzes Semester lang mit dem Thema 'Vektoren' beschäftigt. Nach einigen Stunden stellte ich fest, dass sich viele der Rechnungen und Definitionen, die wir kennengelernt haben, auch auf eine beliebe Anzahl an Dimensionen erweitern lassen. Ich begann die ersten Überlegungen mit meinem Mathe-Lehrer und testete verschiedenste Rechenmethoden. Anhand dieser Überlegungen stellte ich schnell die Komplexität dieses Bereiches der Mathematik fest und widme ihm diese 'Jugend forscht'-Arbeit.

Dabei ist mir durchaus bewusst, dass das Themengebiet, welches ich hier behandle, kein mathematisches Neuland ist und schon mehrfach beschrieben wurde. In meiner Arbeit ergründe ich eigenständig die Zusammenhänge und Regeln für diesen Themenbereich. Dabei fasse ich existierendes Wissen nicht einfach zusammen, sondern erarbeite mir selbst Ansätze und ziehe daraus meine Schlüsse.

2 Definitionen

2.1 Raum und Bezugsraum

Ein Raum kann eine beliebige Anzahl k von Dimensionen besitzen. Dieser wird dementsprechend als $\mathbb{R}^k$ bezeichnet. Die *Dimensionalität* dieses Raumes, d.h. die Anzahl an Dimensionen, die dieser Raum aufweist, ist k.

Ein Raum dient seinen darin existierenden Objekte als *Bezugsraum* und gibt somit an, in welche Richtungen Verschiebungen der einzelnen Punkte der Objekte möglich sind. Des Weiteren gibt er an, in welche Richtungen sich ein Objekte ausdehnen kann.

2.2 Raumachsen

Die Raumachsen eines Raumes sind sich in einem Punkt schneidende Orthogonalen. Der Schnittpunkt wird als der Koordinatenursprung bezeichnet. Sie haben die folgende Form:

$$k_{n_d} = \begin{cases} 1 & \text{für } d = n \\ 0 & \text{für } d \neq n \end{cases} \quad ; d \in \mathbb{N}, 1 \leq d \leq n, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq k \tag{1}$$

Der Vektor $\vec{k}_n$ beschreibt die Raumachse in Richtung der n-ten Dimension. Dieser Vektor besteht aus den Koordinaten k_{n_d}. Der Index d gibt die jeweilige Koordinate dieses Vektors an. k_{1_2} beschreibt also die zweite Koordinate der Raumachse in Richtung der 1. Dimension.

n ist also = 1 und d ist = 2. Aus der Fallunterscheidung lässt sich ableiten, dass der Wert k_{1_2} für $d \neq n$ 0 sein muss. Die Raumachse $\vec{k_1}$ hat die Form:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Im 3-dimensionalen Raum lauten die Raumachsen:

$$\vec{k_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{k_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Die Menge aller Raumachsen ist M_K:

$$M_K = \{\vec{k_1}, \vec{k_2}, \vec{k_3}, ..., \vec{k_k}, \} \tag{4}$$

Die Anzahl der Raumachsen ist folglich k, bzw. $|M_K|$.

2.3 Objekte

Ein Objekt ist hier und im Folgenden als *unbegrenzt ausgedehntes geometrisches* Objekt zu verstehen und wird in der Vektorschreibweise angegeben. [1]

3 Eigenschaften von Objekten

3.1 Aufbau

Ein Objekt kann als Summe eines Ortsvektors und beliebig vieler Richtungsvektoren dargestellt werden, wobei die Anzahl n der Richtungsvektoren die Anzahl k der Dimensionen des Bezugsraumes nicht überschreiten kann ($n \leq k$). Jeder Vektor $\vec{v_i}$ ist ein k-Tupel reeller Zahlen, es gilt also $\vec{v_i} \in \mathbb{R}^k$

Tritt der Fall auf, dass $n = k$ ist, wird das Objekt als *raumgleich* bezeichnet.

Ein Punkt (0-dimensionales Objekt) hat im k-dimensionalen Bezugsraum die folgende

Form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_k \end{pmatrix} \tag{5}$$

Eine Gerade (1-dimensionales Objekt) hätte diese Form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_k \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ ... \\ \Delta x_k \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ein n-dimensionales Objekt hat folgende Form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_k \end{pmatrix} + t_1 * \begin{pmatrix} \Delta x_{1_1} \\ \Delta x_{2_1} \\ \Delta x_{3_1} \\ ... \\ \Delta x_{k_1} \end{pmatrix} + t_2 * \begin{pmatrix} \Delta x_{1_2} \\ \Delta x_{2_2} \\ \Delta x_{3_2} \\ ... \\ \Delta x_{k_2} \end{pmatrix} + ... + t_n * \begin{pmatrix} \Delta x_{1_n} \\ \Delta x_{2_n} \\ \Delta x_{3_n} \\ ... \\ \Delta x_{k_n} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\vec{v} = \vec{x}_0 + t_1 * \vec{x}_1 + t_2 * \vec{x}_2 + ... + t_n * \vec{x}_n \tag{8}$$

Diese Gleichungen können in vereinfachter Form angegeben werden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_k \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} (t_i * \begin{pmatrix} x_{1_i} \\ x_{2_i} \\ x_{3_i} \\ ... \\ x_{k_i} \end{pmatrix}) \tag{9}$$

$$\vec{v} = \vec{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} (t_i * \vec{x}_i) \tag{10}$$

3.2 Dimensionalitäten

3.2.1 propemodente Dimensionalität

Die *propemodente Dimensionalität* (von lat. propemodum: 'praktisch') eines Objektes (pDim $\vec{v}$) entspricht der Anzahl n seiner zueinander linear unabhängiger Richtungsvektoren.

pDim $\vec{v}$ = n

Bei der propemodenten Dimensionalität können eben diese Dimensionen benannt werden. Sie heißen dann die *propemodenten Dimensionen* oder die *Propemodenten* dieses Objektes.

Menge aller Propemodenten:

$$M_P = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\} \tag{11}$$

Bedingung für alle Vektoren untereinander:

$$t_{i_1} * \vec{x}_{i_1} + t_{i_2} * \vec{x}_{i_2} \neq \vec{0}, \forall t_{i_1}, t_{i_2} \in \mathbb{R}^*, i \text{ aus } (10) \tag{12}$$

3.2.2 spatiale Dimensionalität

Die *spatiale Dimensionalität* (von lat. spatial: 'räumlich') eines Objektes (sDim $\vec{v}$) entspricht der Anzahl ρ der Richtungen (parallel zu den Raumachsen), in die sich das Objekt (in Bezug auf einen beliebigen seiner Punkte) ausdehnt.

sDim $\vec{v} = \rho$

Bei der spatialen Dimensionalität können eben diese Dimensionen benannt werden. Sie heißen dann die *spatialen Dimensionen* oder die *Spatialen* dieses Objektes.

Menge aller Spatialen: M_S

Es gilt: $(|M_P| = n) \leq (|M_S| = \rho) \leq k$

Die Elemente der Menge M_S werden bestimmt durch:

$$\vec{k}_n \in M_S, \text{ wenn } \sum_{i=1}^{|M_P|} M_{P_{n_i}} \neq 0 \tag{13}$$

Der Index n beschreibt die Raumachse in Richtung der n-ten Dimension.

Es wird geprüft, ob der Betrag der Summe aller x_n Koordinaten der Richtungsvektoren des Objektes größer als 0 ist. Sollte dem so sein, so ist die Raumachse $\vec{k}_n$ ein Element der Menge M_S.

3.2.3 angepasste spatiale Dimensionalität

Bei der *angepassten spatialen Dimensionalität* eines Objektes (asDim $\vec{v}$) wird ein zusätzlicher neuer Bezugsraum mit k Dimensionen aufgebaut, von dem n Achsen in dem Objekt liegen. Dieser Raum wird als *angepasster Bezugsraum* bezeichnet. Beispielsweise wird bei einer Ebene ($n = 2$) in einem 3-dimensionalen Bezugsraum ein 3-dimensionaler angepasster Bezugsraum erzeugt ($k = 3$), dessen x-y-Fläche mit der Ebene übereinstimmt.

Weitere Objekte werden in diesem angepassten Bezugsraum relativ zum Bezugsobjekt (im Bsp.: zu der Fläche) ausgerichtet. Die angepasste spatiale Dimensionalität ist aufgrund dieses Verfahrens immer identisch mit der propemodente Dimensionalität und der spatialen Dimensionalität.

Es gilt: asDim $\vec{v}$ = pDim $\vec{v}$ = sDim $\vec{v}$.

Aus diesem Grund wird die Menge aller Propemodenten in diesem Fall auch zur Menge aller angepassten Spatialen. Es gilt also:

$$M_{aS} = M_P \tag{14}$$

3.3 Lageverhältnisse

Für die *Lageverhältnisse* zweier Objekte ($\vec{v}$, $\vec{u}$) mit den propemodenten Dimensionalitäten $n_{\vec{v}}$ bzw. $n_{\vec{u}}$ können folgende Aussagen getroffen werden:

(1) $(n_{\vec{v}} = 0 \vee n_{\vec{u}} = 0) \wedge n_{\vec{v}} \neq k \wedge n_{\vec{u}} \neq k$
$\rightarrow$ der Punkt ($n = 0$) liegt auf dem jeweils anderen Objekt oder nicht.

(2) $(n_{\vec{v}} = k \vee n_{\vec{u}} = k) \wedge n_{\vec{v}} \neq 0 \wedge n_{\vec{u}} \neq 0$
$\rightarrow$ das raumgleiche Objekt beinhaltet das andere Objekt, bzw. ein Objekt befindet sich innerhalb des raumgleichen Objektes.

(3) $n_{\vec{v}} \leq k - 2 \wedge n_{\vec{u}} \leq k - 2 \wedge n_{\vec{v}} \neq 0 \wedge n_{\vec{u}} \neq 0$
$\rightarrow$ die Objekte können parallel, windschief, aufeinanderliegend oder schneidend sein.

(4) $(n_{\vec{v}} = k - 1 \vee n_{\vec{u}} = k - 1) \wedge n_{\vec{v}} \neq 0 \wedge n_{\vec{u}} \neq 0 \wedge n_{\vec{v}} \neq k \wedge n_{\vec{u}} \neq k$
$\rightarrow$ die Objekte können parallel, aufeinanderliegend oder schneidend sein.

Beweis des 3. und 4. Falles Es wird im Folgenden nicht von expliziten Objekten ausgegangen und auf ihre Eigenschaften geschlussfolgert. Es findet eine allgemeine Betrachtung zweier n-dimensionaler Objekte statt und es wird abgeleitet, welche Fähigkeiten diese Objekte unter bestimmten Voraussetzungen erhalten können.

Parallelismus Damit ein Parallelismus zwischen zwei Objekten zustande kommen kann, darf mindestens eine Achsenrichtung des angepassten Bezugsraumes von keinem der beiden Objekte als Ausdehnungsrichtung verwendet werden.

Es gilt für die Menge aller dieser Achsen:

$$M_{pR} = \{\vec{k} | \vec{k} \in M_{P_{BEZ}} \wedge \vec{k} \notin M_{S_{O1}} \wedge \vec{k} \notin M_{S_{O2}}\} \tag{15}$$

$M_{P_{BEZ}}$ beschriebt hierbei die Propemodenten des Bezugsraumes, also alle seine Achsenrichtungen. $M_{S_{O1}}$ beschreibt die Spatiale des Objektes 1 und $M_{S_{O2}}$ die des Objektes 2.

Damit nun aber der Satz erfüllt ist, muss gelten:

$$|M_{pR}| \geq 1 \tag{16}$$

Windschiefe Damit eine Windschiefe zwischen zwei Objekten zustande kommen kann, müssen mindestens zwei Achsenrichtung des angepassten Bezugsraumes vorhanden sein, die von höchstens einem Objekt als Ausdehnungsrichtung verwendet werden.

Es gilt für die Menge aller dieser Achsen:

$$M_{wR} = \{\vec{k} | \vec{k} \in M_{P_{BEZ}} \wedge \vec{k} \notin M_{S_{O1}} \wedge \vec{k} \notin M_{S_{O2}}\} \tag{17}$$

$M_{P_{BEZ}}$ beschriebt hierbei die Propemodenten des Bezugsraumes, also alle seine Achsenrichtungen. $M_{S_{O1}}$ beschreibt die Spatiale des Objektes 1 und $M_{S_{O2}}$ die des Objektes 2.

Damit nun aber der Satz erfüllt ist, muss gelten:

$$|M_{wR}| \geq 2 \tag{18}$$

Beispiele: 2 Ebenen im 3-dim. Raum - höchstnes eine 'freie' Achsenrichtung möglich, Parallelismus könnte möglich sein, Windschiefe nicht.

2 Geraden im 3-dim. Raum - höchstens zwei 'freie' Achsenrichtung möglich, Parallelismus und Windschiefe könnten möglich sein.

3.4 Lineare Abhängigkeit

Durch die lineare Abhängigkeit prüft man zwei Objekte auf ihre Parallelität (oder Gleichheit).

Die lineare Abhängigkeit besteht, wenn die Summe aller Richtungsvektoren eines Objektes und *ein* Richtungsvektor des anderen Objektes 0 ergibt. Es gilt also:

$$\sum(Objekt1_{Alle\ \ Richtunsvektoren}) + Objekt2_{Ein\ \ Richtunsvektor} = \vec{0} \tag{19}$$

Bezogen auf die allgemeine Vektorform n-dimensionaler Objekte lässt sich folgende Gleichung ableiten:

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}(m_{i_1} * M_{P_{O1_{i_1}}}) + (s_{i_2} * M_{P_{O2_{i_2}}}) = \vec{0}; i_2 \in \mathbb{Z} \wedge i_2 \in]1; n[, m_{i_1} \in \mathbb{R}^*, s_{i_2} \in \mathbb{R}^* \tag{20}$$

Zur Erklärung der Notation: $M_{P_{O1}}$ die Menge aller Propemodenten des ersten Objektes, $M_{P_{O2}}$ die des zweiten. Der Index i mit der objektbezogenen Kennung ('1' oder '2' als weiterer Index) ist eine Zuweisung zu einem der Objekte der Menge, also einer Propemodenten, also einem Richtungsvektor dieses Objektes.

Ist die Gleichung lösbar, (d.h. es können Werte für m und s eingesetzt werden, sodass die Gleichung stimmt,) und die Triviallösung (alle m=0 und s=0) ist nicht die einzige Lösung, so sind beide Objekte linear abhängig voneinander. Andernfalls sind sie linear unabhängig.

Anzumerken ist, dass die Formel in dieser Form nur von jeweils einem Richtungsvektor des zweiten Objektes ($O2$) ausgeht, der Vorgang also für jeden dieser Vektoren wiederholt werden muss.

Um dies zu übergehen können alle diese Formeln (mit jeweils fortschreitendem i_2, bis n_2 erreicht ist) aneinandergefügt werden:

$$|\sum_{i_1=1}^{n_1}(m_{i_1} * M_{PO1_{i_1}}) + (s_1 * M_{PO2_1})|+ \tag{21}$$

$$|\sum_{i_1=1}^{n_1}(m_{i_1} * M_{PO1_{i_1}}) + (s_2 * M_{PO2_2})|+$$

$$...+$$

$$|\sum_{i_1=1}^{n_1}(m_{i_1} * M_{PO1_{i_1}}) + (s_{n_2} * M_{PO2_{n_2}})|$$

$$= \vec{0}$$

Zusammengefasst lautet diese Formel dann:

$$\sum_{i_2=1}^{n_2}|(\sum_{i_1=1}^{n_1}(m_{i_1} * M_{PO1_{i_1}}) + (s_{i_2} * M_{PO2_{i_2}}))| = \vec{0} \tag{22}$$

Bedingung:

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}(|m_{i_1}|) + \sum_{i_2=1}^{n_2}(|s_{i_2}|) \neq 0 \tag{23}$$

4 Schnitte von Objekten

4.1 Schnittbereich

Damit zwei Objekte sich schneiden, müssen sie mindestens über einen gemeinsamen Punkt verfügen. Ab hier werden die Stütz- und Ortsvektoren nicht mehr in ihrer Matrixschreibweise benannt, sondern in einer allgemeineren Vektorform. Die Indexe sind aber nach wie vor auf die jeweiligen Koordinaten des Vektors zu beziehen.

Die allgemeine Grundform für die Berechnung des Schnittes zweier Objekte lautet:

$$\vec{p} + \sum_{i_1=1}^{n_1} (t_{i_1} * \vec{u}_{i_1}) = \vec{f} + \sum_{i_2=1}^{n_2} (t_{i_2} * \vec{v}_{i_2}) \tag{24}$$

Umformung für die Eingabe in ein Programm zur Errechnung von Gleichungssystemen (Matrix), bspw. für die Eingabe in einen GTR ("Graphischer Taschenrechner"):

$$\vec{p} - \vec{f} = \sum_{i_2=1}^{n_2} (t_{i_2} * \vec{v}_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^{n_1} (-t_{i_1} * \vec{u}_{i_1}) \tag{25}$$

4.2 Eigenschaften von Schnittbereichen

Der Schnittbereich zweier Objekte kann selber als ein Objekt dargestellt werden. Seine Dimensionalität ist dabei mindestens 0 (Punkt) bis maximal n_{min}, die Dimensionalität des Objektes, mit der geringeren Dimensionalität. Es gilt: $0 \leq$ pDim $\vec{v}_{Schnitt} \leq$ pDim $\vec{v}_{minDim}$.

Die Vektorform dieses Schnittes (Schnittobjektes) ergibt sich aus der Vereinfachung der Gleichsetzung, wie sie oben vorliegt.

Beispiel [2]:

gegeben seien die beiden Ebenen E und F:

$$E : \vec{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$F : \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v * \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Nach dem Anwenden des Gleichsetzungsverfahrens und der Eingabe in ein Programm zur Umrechnung der Matrix (mit den Variablen r, s, u und v):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Man erkennt in der letzten Zeile, dass $u + v = 6$ ist. Das heißt auch, dass $u = 6 - v$ ist, was sich wiederum in die Ausgangsgleichung einsetzen lässt:

$$F : \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (6 - v) * \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v * \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Nach dem Umformen ergibt sich:

$$g : \vec{s} = \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + v * \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

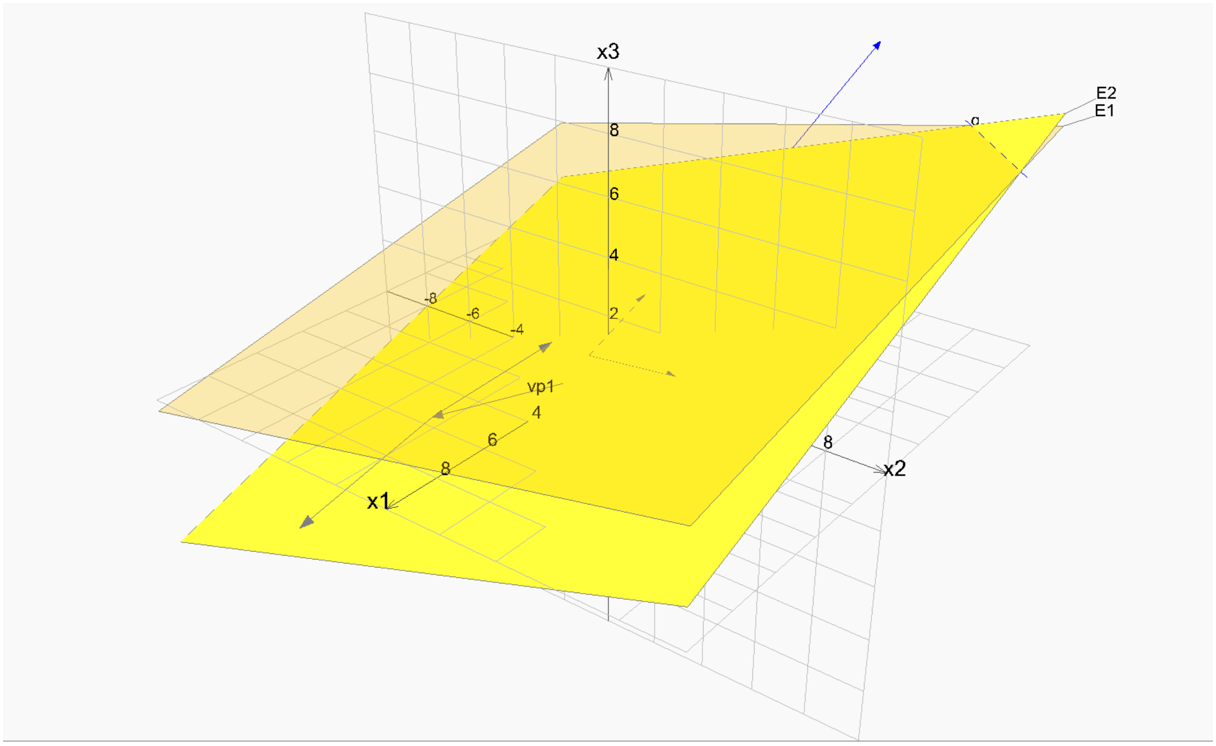

Abbildung 1: graphische Veranschaulichung [3]

5 Abstand

5.1 Vektorbetrag in k Dimensionen

Der allgemeine Satz des Pythagoras besagt für 2 Dimensionen, dass $a^2 + b^2 = x^2$ sind. Umgeformt heißt das so viel wie $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Für 3 Dimensionen heißt es dann $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ und so weiter: $x = \sqrt{\Delta a_1^2 + \Delta a_2^2 + \Delta a_3^2 + ...\Delta a_k^2}$. Bei einem k-dimensionalen Vektor $\vec{a}$ kann seine Länge a durch den Betrag des Vektors ($|\vec{a}|$), also durch das Einsetzen in den Satz des Pythagoras, errechnet werden. Allgemein lautet die Formel dann:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\vec{a}_i)^2} \tag{31}$$

$\vec{a}_i$ beschreibt hierbei die i-te Koordinate des Vektors $\vec{a}$.

5.2 Abstandsvektor

Man nehme zwei Objekte. Um ihren Abstand voneinander zu berechnen, setzen wir beide Objekte in ihrer Vektorform gleich und fügen auf einer Seite der Gleichung den Verschiebungsvektor $\vec{\Delta p}$ hinzu:

$$\vec{p} + \sum_{i_1=1}^{n_1} (t_{i_1} * \vec{u}_{i_1}) + \vec{\Delta p} = \vec{f} + \sum_{i_2=1}^{n_2} (t_{i_2} * \vec{v}_{i_2}) \tag{32}$$

Nach dem Isolieren von $\vec{\Delta p}$ erhalten wir:

$$\vec{\Delta p} = \vec{f} - \vec{p} + \sum_{i_2=1}^{n_2} (t_{i_2} * \vec{v}_{i_2}) - \sum_{i_1=1}^{n_1} (t_{i_1} * \vec{u}_{i_1}) \tag{33}$$

5.3 Abstandsberechnung

Zur Berechnung des Abstandes lassen sich die einzelnen Koordinatengleichungen von $\vec{\Delta p}$ in Formel (31) einpflegen. Es ergibt sich:

$$\Delta p = |\vec{\Delta p}| = \sqrt{\sum_{v=1}^{k} ((\vec{f} - \vec{p} + \sum_{i_2=1}^{n_2} (t_{i_2} * \vec{v}_{i_2}) - \sum_{i_1=1}^{n_1} (t_{i_1} * \vec{u}_{i_1}))_v)^2} \tag{34}$$

Der Index $_v$ beschreibt hierbei die v-te Koordinate des sich ergebenden Vektors.

6 Schnittwinkel

6.1 Problemstellung

Bei der Berechnung von Schnittwinkeln ist ein enormes Problem zu erkennen. So werden Winkel im zwei- und drei-dimensionalen Raum immer mit Hilfe zweier Geraden berechnet.

Die folgende Tabelle zeigt die jeweils genutzten Geraden, um einen Winkel zwischen zwei Objekten im 3-dimensionalen Raum zu berechnen. In der ersten Zeile steht die propemodente Dimensionalität von Objekt 1 (O1), in der ersten Spalte steht die propemodente Dimensionalität von Objekt 2 (O2). Diese sind jeweils immer 1 oder 2. Die Tabelle gibt an, bei welchen propemodenten Dimensionalitäten der Objekte eine Gereade oder ein Normalenvektor verwendet wird.

	pDim O1 = 1	pDim O1 = 2
pDim O2 = 1	Gerade, Gerade	Normalenvektor, Geraden
pDim O2 = 2	Geraden, Normalenvektor	Normalenvektor, Normalenvektor

Bsp.: Bei 2 2-dimensionalen Objekten (Ebenen) wird jeweils ein Normalenvektor genutzt, um den Winkel zwischen den beiden Ebenen zu berechnen.

So lange also beide Objekte 1-dimensional oder (k-1)-dimensional sind, lässt sich ein Winkel berechnen. Bei 1-dimensionalen Objekten handelt es sich schließlich schon um eine Gerade, bei (k-1)-dimensionalen Objekten wird der Normalenvektor verwendet. Im 3-dimensionalen Raum können nur diese beiden Fälle vorkommen (außer ein Objekt hat 0 oder 3 Dimensionen, in diesen Fällen gibt es aber auch keinen Winkel zwischen dem besagten und einem anderen Objekt).

Betrachtet man nun Bezugsräume mit $k > 3$, so ist festzustellen, dass manche Objekte weder 1-dimensional, noch (k-1)-dimensional sind. Ein Beispiel dafür wären 2 Ebenen im 4-dimensionalen Raum, oder auch 2 3-dimensionale Körper in einem 5-dimensionalem Bezugsraum.

Genau an dieser Stelle liegt das Problem: hat ein Objekt mehr als eine Propemodente weniger, als der Bezugsraum Raumachsen hat, so können für dieses Objekt mehr als nur ein Normalenvektor gefunden werden, da dann $(k-n) > 1$ ist, n aber ebenfalls > 1 sein kann. Dies erschwert die Winkelberechnung zwischen zwei solchen Objekten, da bei den bisherigen Fällen (im 2- und 3-dimensionalen Raum) immer von einer Gerade pro Objekt ausgegangen wird.

7 Anwendungsbereich

Die Anwendung meiner Arbeit lässt sich weder in der Alltagswelt, noch im Schulunterricht finden. Da es sich hier um eine abstrakte Betrachtung geometrischer Zusammenhänge handelt, wird sich ihr Anwendungsbereich ebenfalls im Abstrakten befinden. Ein Beispiel dafür wären Berechnung auf Basis der Stringtheorie, die von mehreren Dimensionen ausgeht [4] , oder in der geometrischen Analyse von komplexen Zahlen. Dabei würde zu jeder Achse (auf der für gewöhnlich nur reelle Zahlen aufgetragen sind) eine Achse mit darauf aufgetragenen imaginären Zahlen kommen. So würde aus einem 3-dimensionalen Koordinatensystem mit reellen Zahlen ein 6-dimensionales Koordinatensystem werden, welches dann reelle, imaginäre und komplexe Zahlen enthalten würde.

8 Aussichten

Insbesondere mein Problem bei der Verallgemeinerung der Berechnung der Schnittwinkeln zweier Objekte ist eine Sache, zu der ich gerne zurückkommen würde, da ich davon überzeugt bin, eine Lösung finden zu können.

9 Danksagung

Meinen Dank möchte ich an Herrn Biedermann aussprechen, der mir viele gute Denkanstöße gegeben hat und mich motiviert hat, dieses Projekt zu meiner JuFo-Arbeit zu machen. Des weiteren bedanke ich mich bei Herrn Sens, Herrn Misfeldt und Herrn Dr. Lion, die mir bei Fragen gut weitergeholfen haben. Außerdem danke ich meinen Eltern für ihre Motivation und Unterstützung bei meiner Arbeit.

10 Anhang

10.1 Quellenverzeichnis

[1] *Abgeleitet von:*

Unbekannter Autor: Ebene (Mathematik)

`https://de.wikipedia.org/wiki/Ebene_(Mathematik)`

[2] *Beispiel von:*

Unbekannter Autor: Schnittgerade zweier Ebenen in Parameterform

`http://www.onlinemathe.de/forum/Schnittgerade-zweier-Ebenen-in-Parameterform`

[3] *Bild erstellt mittels:*

Vektoris3D 2.0

[4] *Abgeleitet von:*

Maximilian Kreuzer: Jenseits von Raum und Zeit

`http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/strings.html`

10.2 Festgelegte Variablenbezeichnungen

k: Anzahl der Dimensionen des Bezugsraumes

n: Anzahl der Dimensionen eines Objektes

$\vec{k}_n$: Raumachse in Richtung der n-ten Dimension

M_P: Menge aller Propemodenten eines Objektes

M_S: Menge aller Spatiale eines Objektes

M_K: Menge aller Raumachsen des Bezugsraumes eines Objektes